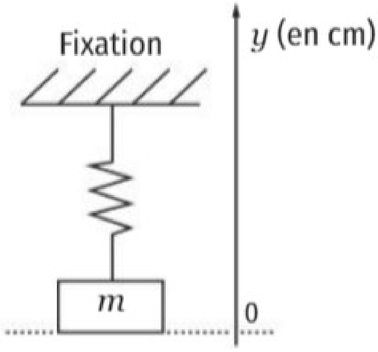
Exercice 1 : Trigonométrie

On suspend une masse m à un ressort. On note y la hauteur relative de la masse. La valeur $y = 0$ correspond à l'équilibre lorsque la masse est immobile.

On amène la masse à 10 cm de hauteur, puis on la lâche. On suppose ici que le modèle est parfait et qu'il n'y a pas d'amortissement des oscillations, autrement dit que les oscillations restent les mêmes au cours du temps, sans être atténuées.



Les oscillations pour $t \geqslant 0$ (t en seconde) sont données par $y(t) = 10\cos(3t)$.

1. Pour quel temps t_1 la masse va-t-elle passer pour la première fois par sa position d'équilibre $y = 0$?

2. Pour quel temps t_2 la masse va-t-elle repasser pour la deuxième fois par sa position d'équilibre ?

3. Quelle est la période des oscillations de la masse ?

4. Quelle sera la hauteur maximale de la masse ? Et la hauteur minimale ?

Exercice 2 : Primitives

Au démarrage de sa course en Jet-ski, Tom passe de 0 à 125 km/h en 3,2 secondes avec une accélération constante.

1. Vérifier que l'accélération moyenne pour passer de 0 à 125 km/h en 3,2 secondes vaut environ 10,85 m/s².

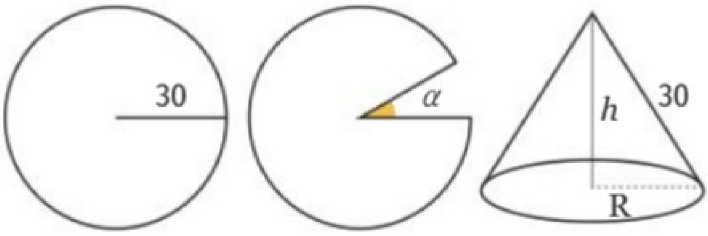
2. Déterminer la vitesse de Tom à l'instant $t \in [0 ; 3{,}2]$ en seconde, notée $v(t)$, exprimée en m/s.

Vérifier que $v(3{,}2) \approx 34{,}72$.

3. Déterminer l'expression de la distance parcourue par Tom à l'instant t, notée $x(t)$, exprimée en mètre.

Exercice 3 : Compléments sur la dérivation

Dans un disque de rayon 30 cm, on découpe un secteur de mesure α radian. On superpose ensuite les bords du disque restant pour obtenir un cône de révolution.



On note alors h la hauteur du cône et R le rayon de la base du cône.

1. Justifier que $R^2 = 900 - h^2$.

2. On rappelle que le volume d'un cône est donné par la formule : $V = \frac{1}{3} \times \text{AireBase} \times h$.

Exprimer l'aire $V(h)$ du cône en fonction de h.

3. Montrer que $V'(h) = \pi \times (10\sqrt{3} - h) \times (10\sqrt{3} + h)$.

4. Étudier les variations de la fonction V sur l'intervalle $[0 ; 30]$.

5. a. Quelle est la valeur de h rendant le volume du cône maximal ? Que vaut alors le volume du cône ? Donner les valeurs exactes.

b. Quelles sont dans ce cas-là les dimensions du cône ?

Exercice 4 : Nombres complexes

On représente parfois les résistances de certains composants électroniques par des nombres complexes.

Par exemple :

- l'impédance d'une résistance pure est représentée par le nombre réel $Z_R = R$. C'est le seul composant à avoir une impédance réelle ;
- l'impédance d'une bobine d'inductance L est représentée par le nombre complexe $Z_L = iL\omega$, où ω désigne la pulsation du signal et dépend de l'intensité du courant présent dans le circuit.

Lorsqu'ils sont montés en parallèle, ces deux composants peuvent être modélisés par un unique composant dont l'impédance Z vérifie $\frac{1}{Z} = \frac{1}{Z_R} + \frac{1}{Z_L}$.

1. Montrer que $Z = \frac{iRL\omega}{R + iL\omega}$.

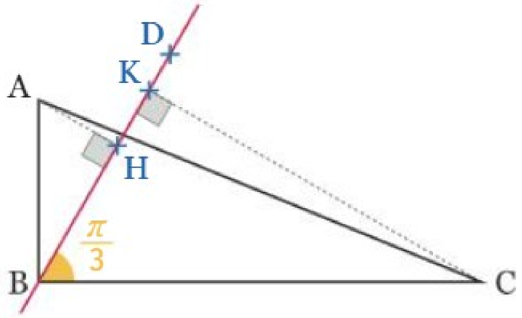
2. Donner la forme algébrique de Z en fonction de R, de L et de ω.

Dans la vie professionnelle

Les nombres complexes sont très utiles dans les métiers de l'électronique. Ils servent notamment à modéliser une intensité ou une tension : le module indique la valeur de l'intensité ou de la tension, et l'argument donne **le déphasage** par rapport à la source utilisée.

Exercice 5 : Produit scalaire

Soit ABC un triangle rectangle en B tel que $AB = 5$ et $BC = 13$. On considère un point D, comme indiqué sur la figure ci-dessous, tel que $\left(\overrightarrow{BC}\,;\,\overrightarrow{BD}\right) = \frac{\pi}{3}$. On note H et K les projetés orthogonaux respectifs de A et C sur (BD).



1. Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

2. a. Calculer les valeurs exactes de BH et de BK.

b. En déduire $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BK}$.

3. Calculer $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BH}$.

4. Calculer les produits scalaires suivants.

a. $\overrightarrow{BA} \cdot \left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BK}\right)$ **b.** $\overrightarrow{BC} \cdot \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BH}\right)$ **c.** $\overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{KC}$